令和 6 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学 選択問題

令和 5 年 8 月 23 日（13 時 30 分 から 15 時 30 分まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと．

2) 問題は 8 題ある．3 題を選択して解答すること．

3) 各問題ごとに 1 枚の解答用紙を用いること．

4) 解答用紙の左肩上部の $\boxed{}$ に選択した問題番号を記入し，受験番号をすべての解答用紙の（　）内に記入すること．また，氏名は書かないこと．

5) 問題冊子は，このページを含め全 7 ページである．

記号

$\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合

$\mathbb{Z}_{>0}$: 正の整数全体のなす集合

$\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合

$\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合

$\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合

1 群 G の正規部分群 N および N の部分群 K を考える．また N の自己同型写像全体がなす群を $\mathrm{Aut}(N)$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) 次の命題が真であることを示せ．

命題： K が G の正規部分群であるならば，K は N の正規部分群である．

(2) 群 G の各元 g に対して，写像

$$i(g) : G \longrightarrow G,\ n \mapsto gng^{-1}$$

は，N が G の正規部分群であることから，N から N への写像 $I(g) := i(g)|_N$ を定める．ただし，$i(g)|_N$ は $i(g)$ の N への制限を表す．このとき，$I(g) \in \mathrm{Aut}(N)$ であることを示せ．さらに写像

$$I : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(N),\ g \mapsto I(g)$$

は群準同型であることを示せ．

(3) $\mathrm{Aut}(N)$ の各元 σ に対して $\sigma(K) \subset K$ が成り立つとき，K は G の正規部分群であることを示せ．

(4) 群 G が 4 次対称群 S_4 であるとき，(1) の命題の逆が成立しないことを具体的に反例を与えることで示せ．すなわち，N は $G = S_4$ の正規部分群かつ K は N の正規部分群であるが K は $G = S_4$ の正規部分群でないような N, K の例を理由とともに与えよ．

2 多項式 $f(x) = x^3 - 2$ の $\mathbb{C}$ における $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を K とおく．複素数体 $\mathbb{C}$ において -3 の平方根のひとつを $\sqrt{-3}$ と表し，2 の 3 乗根であって実数であるものを $\sqrt[3]{2}$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上の既約多項式であることを示せ．

(2) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$ であることを示せ．

(3) K の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数は 6 であることを示せ．またガロア群 $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は 3 次対称群 S_3 と群として同型であることを示せ．

(4) K の部分体であって，$\mathbb{Q}$ 上の拡大次数が 3 であるものをすべて与えよ．

$\boxed{3}$ 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 上で定義される滑らかな関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y,z)=x^4-4xy+y^4+z^2 \qquad \left((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right)$$

とし，$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=1\}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) S は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分多様体であることを示せ．

(2) S 上で定義される滑らかな関数 $g:S\to\mathbb{R}$ を

$$g(x,y,z)=z$$

とするとき，g の臨界点をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ において，

$$X=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{3z^2}{4}=1\right\}$$

および

$$Y=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+\frac{3y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1\right\}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) すべての非負の整数 q に対して，X の q 次の整係数ホモロジー群 $H_q(X)$ を求めよ．

(2) すべての非負の整数 q に対して，$X\cap Y$ の q 次の整係数ホモロジー群 $H_q(X\cap Y)$ を求めよ．

(3) すべての非負の整数 q に対して，$X\cup Y$ の q 次の整係数ホモロジー群 $H_q(X\cup Y)$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 正の整数 n と $k=1,\ldots,2^n-1$ に対して

$$a_{n,k}=\frac{k}{2^n}$$

とおき，$\mathbb{R}$ の開区間 $I=(0,1)$ 上の関数 $f_{n,k}:I\to\mathbb{R}$ を

$$f_{n,k}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{a_{n,k}-x}} & (0<x<a_{n,k})\\ 0 & (a_{n,k}\le x<1)\end{cases}$$

と定める．また m を $\mathbb{R}$ におけるルベーグ測度とする．以下の問いに答えよ．

(1) 正の整数 n と $k=1,\ldots,2^n-1$ に対して関数 $f_{n,k}$ は I 上のルベーグ可測関数であることを示せ．さらにルベーグ積分 $\displaystyle\int_I f_{n,k}(x)\,m(dx)$ の値を求めよ．

(2) 正の整数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{2^n-1}\sqrt{k}\le 2^{\frac{3}{2}n}$$

が成り立つことを示せ．

(3) I 上の関数 f を

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{f_{n,k}(x)}{2^{2n}}\qquad(x\in I)$$

と定めると，f は I 上でほとんどいたるところ有限な値をとることを示せ．

$\boxed{6}$ 関数空間 $X = C([0,1]) = \{u : [0,1] \to \mathbb{R} \mid u$ は $[0,1]$ 上の連続関数$\}$ のノルムを $\|u\|_X = \max_{x\in[0,1]} |u(x)|$ $(u \in X)$ と定めることで与えられる実バナッハ空間 $(X, \|\cdot\|_X)$ を考える．さらに $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．X 上の有界線形作用素 $T : X \to X$ を

$$(Tu)(x) = \int_0^x K(x,y)u(y)\,dy \qquad (u \in X,\ x \in [0,1])$$

によって定める．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の正の整数 n に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|(T^n u)(x)| \le M^n \frac{x^n}{n!} \|u\|_X \qquad (u \in X,\ x \in [0,1])$$

ただし $M = \max\{|K(x,y)| \mid (x,y) \in [0,1] \times [0,1]\}$ とする．

(2) X 上の有界線形作用素全体からなる線形空間 $\mathcal{B}(X)$ のノルムを

$$\|F\| = \sup\{\|Fu\|_X \mid u \in X,\ \|u\|_X \le 1\} \qquad (F \in \mathcal{B}(X))$$

と定めることで与えられる実バナッハ空間 $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$ を考える．このとき，級数

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} T^n$$

が $\mathcal{B}(X)$ 上で収束することを示せ．ただし $T^0 = I$ は X 上の恒等作用素を表すものとする．

(3) S を (2) で与えた X 上の有界線形作用素とする．このとき，任意の $f \in X$ に対して，$u = Sf = \sum_{n=0}^{\infty} T^n f$ は，条件

$$u - Tu = f$$

を満たすただ一つの X の元であることを示せ．

$\boxed{7}$ $p(z)$ を複素数を係数とする多項式とする．さらに $f(z), F(z)$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上で定義された正則関数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $f(z) = F\left(\overline{f(z)}\right)$ が成り立つと仮定する．ただし $\overline{f(z)}$ は $f(z)$ の共役複素数を表す．このとき，関数 $f(z)$ は定数関数であることを示せ．

(2) $|z| \geq 1$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $|f(z)| \leq |p(z)|$ が成り立つと仮定する．このとき，関数 $f(z)$ は z についての多項式で定義される関数であることを示せ．

(3) $p(z)$ は 0 でない多項式とし，その次数を n とする．$|z| \leq 1$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $|p(z)| \leq |z|^n$ が成り立つと仮定する．このとき，ある複素数 c が存在し，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $p(z) = cz^n$ が成立することを示せ．

$\boxed{8}$ 集合 A の濃度を $|A|$ と表し，特に $|\mathbb{Z}_{>0}| = \aleph_0$ と書く．また $\kappa = |A|$ のとき，べき集合 $\mathcal{P}(A)$ の濃度を $|\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa$ と表す．実数全体のなす集合 $\mathbb{R}$ を，通常の和と有理数との積によって有理数体 $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみなすとき，以下の問いに答えよ．

(1) $C \subseteq \mathbb{R}$ を空でない高々可算な集合とし，$\mathbb{R}$ における C を含む最小の $\mathbb{Q}$ 上の部分ベクトル空間を $\langle C \rangle$ と表す．このとき $\kappa = |\langle C \rangle|$ は以下の (a) から (f) のいずれを満たすか，理由とともに答えよ．

(a) $\kappa = \aleph_0$

(b) $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$

(c) $\kappa = 2^{\aleph_0}$

(d) $2^{\aleph_0} < \kappa < 2^{2^{\aleph_0}}$

(e) $\kappa = 2^{2^{\aleph_0}}$

(f) $2^{2^{\aleph_0}} < \kappa$

(2) $B \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間としての $\mathbb{R}$ の基底とする．このとき $\kappa = |B|$ は (1) の (a) から (f) のいずれを満たすか，理由とともに答えよ．

(3) $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ は $\mathbb{Q}$-線形写像 $\}$ とする．このとき $\kappa = |\mathcal{H}|$ は (1) の (a) から (f) のいずれを満たすか，理由とともに答えよ．

(4) (3) で与えた $\mathcal{H}$ に対して $\mathcal{H}_c = \{f \in \mathcal{H} \mid f$ は $\mathbb{R}$ の通常のユークリッド位相について連続 $\}$ とする．このとき $\kappa = |\mathcal{H}_c|$ は (1) の (a) から (f) のいずれを満たすか，理由とともに答えよ．