令和 6 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学　共通問題

令和 5 年 8 月 23 日（9 時 30 分 から 12 時 まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと．
2) 問題は 4 題ある．全問に解答すること．
3) 解答は各問題ごとに指定された解答用紙を用いること．
4) 受験番号をすべての解答用紙の（　）内に記入すること．また，氏名は書かないこと．
5) 問題冊子は，このページを含め全 3 ページである．

記号

$\mathbb{Z}$：整数全体のなす集合

$\mathbb{Z}_{>0}$：正の整数全体のなす集合

$\mathbb{Q}$：有理数全体のなす集合

$\mathbb{R}$：実数全体のなす集合

$\mathbb{C}$：複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ 複素数 a に対し，3 次正方行列 $A(a)$ を

$$A(a) = \begin{pmatrix} 3-2a & 4 & a-2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6-2a & 8 & a-4 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $A(a)$ の固有多項式を求めよ．

(2) $A(a)$ の固有多項式が重根をもつような a をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた a を一つ選び，そのときの $A(a)$ のジョルダン標準形を決定せよ．

$\boxed{2}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ を $\mathbb{R}$ 上の通常のユークリッド距離から定まる位相 $\mathcal{O}$ をもつ位相空間とする．また $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q},\, x^2 \leq 2\}$ とし，$\mathcal{O}_X$ を $\mathcal{O}$ から定まる X 上の相対位相とする．以下の問いに答えよ．

(1) X の部分集合 $U = \{x \in X \mid 0 < x < 1\}$ は位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ の開集合かつ閉集合であることを示せ．

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ の空でない連結な部分集合は一点からなる集合であることを示せ．

(3) 任意の連続写像 $h\colon (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ は定値写像であることを示せ．

(4) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ はコンパクトであるか，理由とともに答えよ．

$\boxed{3}$ 正の整数 n に対し，開区間 $I=(-1,1)$ 上の関数 $f_n : I \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) = x(1-x^2)^n \qquad (x \in I)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 各 $x \in I$ に対して極限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in I)$ によって定まる関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に I 上で一様収束することを示せ．

(3) 各 $x \in I$ に対して極限 $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ を求めよ．ただし f_n' は f_n の導関数を表す．

(4) 関数列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ は $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ $(x \in I)$ によって定まる関数 $g : I \to \mathbb{R}$ に I 上で一様収束するか，理由とともに答えよ．

$\boxed{4}$ 実数からなる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において，$a_1 > 0$ とし，さらに任意の正の整数 n に対して $|a_{n+1}| < |a_n|$ および $a_n a_{n+1} < 0$ が成り立つとする．また数列 $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ を

$$S_m = \sum_{n=1}^{2m} a_n \qquad (m \in \mathbb{Z}_{>0})$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ は狭義単調増加であることを示せ．

(2) 極限 $\lim_{m\to\infty} S_m$ が存在することを示せ．

(3) 関数 $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [2j-2, 2j-1)) \\ -1 & (x \in [2j-1, 2j)) \end{cases} \qquad (j \in \mathbb{Z}_{>0})$$

と定める．このとき，数列 $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ を

$$T_m = \int_0^{2m} \frac{g(x)}{\log(e+x)}\,dx \qquad (m \in \mathbb{Z}_{>0})$$

と定めると，極限 $T = \lim_{m\to\infty} T_m$ が存在し

$$0 < T < \int_0^1 \frac{1}{\log(e+x)}\,dx$$

を満たすことを示せ．