令和 5 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学 選択問題

令和 4 年 8 月 18 日（13 時 30 分 から 15 時 30 分まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと．

2) 問題は 8 題ある．3 題を選択して解答すること．

3) 各問題ごとに 1 枚の解答用紙を用いること．

4) 解答用紙の左肩上部の $\boxed{}$ に選択した問題番号を記入し，受験番号を（　）内に記入すること．また，<u>氏名は書かないこと</u>．

5) 問題冊子は，このページを含め全 7 ページである．

記号

$\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合

$\mathbb{Z}_{>0}$: 正の整数全体のなす集合

$\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合

$\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合

$\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ G を群とし, H を G の部分群とする.

(1) $\sigma \in G$ に対して, $\sigma H \sigma^{-1} = \{\sigma h \sigma^{-1} \mid h \in H\}$ は G の部分群であることを示せ.

(2) $X = \{\sigma H \sigma^{-1} \mid \sigma \in G\}$ とする. このとき, $N = \{\tau \in G \mid \tau K \tau^{-1} = K \, (\forall K \in X)\}$ は G の正規部分群であることを示せ.

(3) G を 4 次対称群 S_4 とし, H を巡回置換 $(1,2,3,4)$ で生成される部分群とする. このとき, (2) で定めた集合 X の元の個数を求めよ.

(4) G と H を (3) で定めたものとするとき, N を求めよ. ただし, S_4 の正規部分群は, $\{e\}, V = \{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}, A_4, S_4$ のみであることを用いてもよい. ここで, e は S_4 の単位元, A_4 は 4 次交代群とする.

$\boxed{2}$ 複素数を係数とする（収束するとは限らない）形式的べき級数のなす環

$$R = \left\{ f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{C} \right\}$$

および, それを含む（収束するとは限らない）形式的ローラン級数のなす体

$$K = \left\{ f(t) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{C} \right\}$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 環 R は単項イデアル整域であることを示せ.

(2) M を体 K 上の n 次元ベクトル空間とし, その有限生成 R-部分加群 $N \subset M$ は体 K 上 M を生成するとする. このとき N は環 R 上の階数 n の自由加群であることを示せ.

(3) 正の整数 n に対して $s = t^n \in K$ とおき, K の部分体 $L \subset K$ を

$$L = \left\{ g(s) = \sum_{i=k}^{\infty} b_i s^i \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}, b_i \in \mathbb{C} \right\} \subset K$$

と定める. このとき K は L のガロア拡大であることを示し, そのガロア群を求めよ.

$\boxed{3}$ 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ において

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ z^2=1\}$$

とおき，$B = A \times [-1,1]$ とする．B 上の同値関係 $\sim$ を (x,y,z,t), $(x',y',z',t') \in B$ に対し，

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) \sim (x',y',z',t') \iff &(x,y,z,t) = (x',y',z',t') \\ &\text{または } t = t' = 1 \\ &\text{または } t = t' = -1\end{aligned}$$

で定める（$\sim$ が同値関係になることは認めてよい）．$C = B/\sim$ を商位相空間とし，$p : B \to C$ を標準的な商写像とする．$B_1 = A \times [0,1]$, $B_2 = A \times [-1,0]$, $C_1 = p(B_1)$, $C_2 = p(B_2)$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) C は弧状連結であることを示せ．

(2) C_1 が可縮であることを，ホモトピーを構成することにより示せ．

(3) 非負の整数 q に対し，C の整係数ホモロジー群 $H_q(C)$ を求めよ．

$\boxed{4}$ 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ からそれ自身への写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を次で定義する．

$$f(x,y,z) = \left(x + \frac{xy}{2}, y + \frac{zx}{2}, z\right) \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ における f のヤコビ行列 $J(x,y,z)$ を計算せよ．

(2) 集合 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \operatorname{rank} J(x,y,z) = 2\}$ は $\mathbb{R}^3$ の空でない部分多様体となることを示せ．

(3) f を2次元球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ に制限して得られる写像 $g = f|_{S^2} : S^2 \to \mathbb{R}^3$ を考える．集合 $\{p \in S^2 \mid \operatorname{rank} dg_p = 2\}$ を求めよ．ただし，$dg_p : T_p(S^2) \to T_{f(p)}(\mathbb{R}^3)$ は点 $p \in S^2$ における g の微分写像を表す．

$\boxed{5}$ m は$\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とする. $\mathbb{R}$ 上の非負値ルベーグ可測関数 f は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,m(dx) < \infty$ を満たすものとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 正の実数 R に対して

$$f_R(x) = \begin{cases} \min\{f(x), R\}. & (|x| \le R) \\ 0 & (|x| > R) \end{cases}$$

とおく. このとき, 任意の正の実数 ε に対してある正の実数 R が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} \{f(x) - f_R(x)\}\, m(dx) < \varepsilon$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\mathbb{R}$ 上の非負値ルベーグ可測関数の列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次の条件 $(*)$ を満たすものとする.

$(*)$ 正の実数δ とルベーグ可測集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, A が有限な測度 $m(A) < \infty$ を持つならば

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x \in \mathbb{R} \mid g_n(x) > \delta\} \cap A) = 0$$

が成り立つ.

このとき, ルベーグ可測集合 $A \subset \mathbb{R}$ が, 有限な測度 $m(A) < \infty$ を持つならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \min\{g_n(x), 1\}\, m(dx) = 0$$

が成り立つことを示せ.

(3) $\mathbb{R}$ 上の非負値ルベーグ可測関数の列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は (2) で定めた条件 $(*)$ を満たすものとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \min\{g_n(x), 1\} f(x)\, m(dx) = 0$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{6}$ 実ヒルベルト空間 $(H,(\cdot,\cdot))$ とそのノルム $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ $(x\in H)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 次の (i), (ii) を証明せよ.

(i) H の元からなる列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x\in H$ に弱収束し, さらに $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$ を満たすとき, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は x に強収束する.

(ii) H の元からなる列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x\in H$ に弱収束するとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|\geq\|x\|.$$

(2) H の部分集合 S が以下の性質を満たすものとする.

集合 S の元からなる列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x\in H$ に弱収束するならば, x は S に属する.

また $x_0\in H$ に対して, 汎関数 $I:S\to\mathbb{R}$ を

$$I(y)=\|y-x_0\|,\quad y\in S$$

と定める. 汎関数 I の任意の最小化列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (すなわち $y_n\in S$ かつ $I(y_n)\to\inf_{y\in S}I(y)$ を満たす列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$) は H 上で強収束する部分列を持つことを証明せよ.

$\boxed{7}$ $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とする. 関数 f は D 上で正則かつ単射で, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ を満たすものとする. 関数 $g : \mathbb{C} \setminus \overline{D} \to \mathbb{C}$ を

$$g(z) = \frac{1}{f(z^{-1})} \quad (|z| > 1)$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) 複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を用いて関数 f の $z = 0$ を中心とするテイラー展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < 1)$$

と表すとき, 係数 a_0 および a_1 の値を求めよ.

(2) 関数 g はある複素数列 $\{b_n\}_{n=-1}^{\infty}$ を用いて

$$g(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n z^{-n} \quad (|z| > 1)$$

と表せることを示せ.

(3) $r > 1$ および閉曲線 $C_r : z = g(re^{i\theta})$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ に対して, 以下の等式を示せ.

$$\int_{C_r} \bar{z}\, dz = 2\pi i \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{-2n} \right).$$

ただし $\bar{z}$ は z の複素共役を表すものとする.

$\boxed{8}$ X を無限集合とし，$\mathcal{P}(X)$ を X の部分集合全体のなす集合とする．また非可算集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ は次の性質を満たすとする．

- 各 $A \in \mathcal{A}$ は有限集合である．
- $\mathcal{A}$ の任意の非可算部分集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ について $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \emptyset$ である．

以下の問いに答えよ．

(1) $\mathcal{A}$ の非可算部分集合 $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ で，任意の $A, B \in \mathcal{A}'$ について $|A| = |B|$ となるものが存在することを示せ（ここで $|Y|$ は集合 Y の濃度を表すこととする）．

(2) 任意の $a \in X$ に対し，a を要素にもつ $\mathcal{A}$ の元は高々可算個しかないことを示せ．

(3) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ を $\mathcal{A}$ の高々可算な部分集合とする．このとき $\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\right) \cap A \neq \emptyset$ となるような $A \in \mathcal{A}$ は高々可算個しかないことを示せ．

(4) 次の 2 条件を満たす $\mathcal{A}$ の非可算部分集合 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ が存在することを示せ．

- 任意の $A, B \in \mathcal{C}$ について $|A| = |B|$.
- 任意の $A, B \in \mathcal{C}$ について $A \neq B$ ならば $A \cap B = \emptyset$.