令和 5 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

$\boxed{\text{英語}}$

令和 4 年 8 月 18 日（16 時 15 分から 17 時まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと．
2) 問題は 2 題ある．全問に解答すること．
3) 受験番号を（　）内に記入すること．また，氏名は書かないこと．
4) 問題冊子は，このページを含め全 3 ページである．

1 次の英文を日本語に訳せ．ただし、数式はそのまま書いてよい（以下の例参照）．

例：英文

"The solution to the equation $ax = b$ $(a \neq 0)$ is given by $x = b/a$."

の日本語訳の例：

「方程式 $ax = b$ $(a \neq 0)$ の解は $x = b/a$ で与えられる」

著作権上の制約により公開していません。

(出典: Gerald B. Folland, *Real Analysis*)

$\boxed{2}$ 次を英文に訳せ.

定理 有界閉区間 $I = [a, b]$ で連続な実数値関数 f は I において最大値をとる.

証明 $M = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$ とおく $(M \leq \infty)$. 上限の性質から, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$ となるような数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x_n \in I)$ がとれる. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であるから, Bolzano-Weierstrass の定理により, 収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を持つ. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ とする. $x_0 \in I$ であり, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$. 一方, f の連続性により, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ でもあるので, $f(x_0) = M$ を得る. ゆえに, $M < \infty$ で M は f の I における最大値である. □