令和 4 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学 — 選択問題

令和 3 年 8 月 19 日（13 時 30 分 から 15 時 30 分まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと．

2) 問題は 8 題ある．3 題を選択して解答すること．

3) 各問題ごとに 1 枚の解答用紙を用いること．

4) 解答用紙の左肩上部の $\boxed{}$ に選択した問題番号を記入し，受験番号を（　）内に記入すること．また，氏名は書かないこと．

5) 問題冊子は，このページを含め全 7 ページである．

記号

$\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合

$\mathbb{Z}_{>0}$: 正の整数全体のなす集合

$\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合

$\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合

$\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ 実数係数の 3 次正則行列全体のなす群を $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ で表す．群 $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ の部分群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & a_1 \\ c_{21} & c_{22} & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_{11}, c_{21}, c_{22}, a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ c_{11}c_{22} \neq 0 \right\}$$

および，

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_{11}, c_{21}, c_{22} \in \mathbb{R},\ c_{11}c_{22} \neq 0 \right\}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) G の任意の元 g は，一意的に $g = g_1g_2$, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ と表されることを示せ．

(2) G の中心を求めよ．

(3) G_1 と G_2 の直積群 $G_1 \times G_2$ は G と群として同型でないことを示せ．

(4) G は可解群であることを示せ．

$\boxed{2}$ 剰余環 $R = \mathbb{Z}[X]/(X^2+5)$ とそのイデアル $I = (2, \overline{X}+1)$ について，以下の問いに答えよ．ただし $\overline{X} \in R$ は X を含む剰余類を表す．

(1) R は整域であることを示せ．

(2) I は R の極大イデアルであることを示せ．

(3) a, b を整数とし，$\alpha = a + b\overline{X} \in R$ とおく．$\alpha \neq 0$ ならば $R/(\alpha)$ の位数は a^2+5b^2 であることを示せ．ただし (α) は α で生成される R の単項イデアルを表す．

(4) I は R の単項イデアルでないことを示せ．

$\boxed{3}$ ユークリッド空間 $\mathbb{R}^5$ において，

$$
\begin{aligned}
T &= \{(u,v,x,y,z) \in \mathbb{R}^5 \mid u^2+v^2=1,\ x^2+y^2+z^2=1\},\\
D_1 &= \{(1,0,x,y,z) \in \mathbb{R}^5 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\},\\
D_2 &= \{(-1,0,x,y,z) \in \mathbb{R}^5 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}
\end{aligned}
$$

とおく．$\mathbb{R}^5$ の部分位相空間

$$
\begin{aligned}
X &= (T \cap \{(u,v,x,y,z) \in \mathbb{R}^5 \mid v \ge 0\}) \cup D_1,\\
Y &= (T \cap \{(u,v,x,y,z) \in \mathbb{R}^5 \mid v \le 0\}) \cup D_2,\\
Z &= X \cup Y
\end{aligned}
$$

を考える．

(1) X が 3 次元閉球体 $B^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ とホモトピー同値であることを示せ．

(2) 非負整数 q に対し，Z の整係数ホモロジー群 $H_q(Z)$ を求めよ．

$\boxed{4}$ 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の標準内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とし，写像 $f\colon \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(x,y) = (\langle x,x\rangle, \langle y,y\rangle, \langle x,y\rangle)$$

と定める．また，$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の部分集合を

$$U = f^{-1}(\{(1,1,0)\}), \quad V = \{(x,y) \in U \mid \langle x,n\rangle = 0\}$$

と定める．ここで $n = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(x,y) = ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ における f のヤコビ行列 $(Jf)_{(x,y)}$ を求めよ．

(2) U は $\mathbb{R}^6$ の 3 次元部分多様体であることを示せ．

(3) V は 2 次元トーラス $T = S^1 \times S^1$ と同相であることを示せ．ここで S^1 は単位円周である．

$\boxed{5}$ $1 \leq p < \infty$ とし，μ を $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度とする．関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ はルベーグ可測であり，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty$ を満たすものとする．さらに f の分布関数を

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > \lambda\}) \quad (\lambda > 0)$$

によって定義する．以下の問いに答えよ．

(1) 分布関数 $\mu_f(\lambda)$ が $\lambda > 0$ について広義単調減少であることを示せ．

(2) 任意の $\lambda > 0$ に対して，次が成り立つことを示せ．

$$\lambda^p \mu_f(\lambda) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, d\mu(x)$$

(3) 次が成り立つことを示せ．

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, d\mu(x) = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) \, d\lambda$$

(4) 次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^p \mu_f(\lambda) = 0$$

$\boxed{6}$ 実ヒルベルト空間 $(H,(\cdot,\cdot))$ 上で定義された線形作用素 $A:H\to H$ が

$$(Ax,x)\geq 0 \quad (x\in H)$$

を満たすとする．以下の問いに答えよ．

(1) $x,f\in H$ が

$$(f-Ay,x-y)\geq 0 \quad (y\in H)$$

を満たすとき，$f=Ax$ が成り立つことを示せ．

(2) A は閉作用素であることを示せ．すなわち A のグラフ $G(A)=\{\,[x,Ax]\in H\times H\mid x\in H\}$ が $H\times H$ のノルム $\|\cdot\|_{H\times H}$ によって定まる強位相に関して閉集合となることを示せ．ただし $H\times H$ のノルム $\|\cdot\|_{H\times H}$ は $\|[x,y]\|_{H\times H}=\|x\|_H+\|y\|_H$ $([x,y]\in H\times H)$ によって定まるものとし，また $\|x\|_H=\sqrt{(x,x)}$ $(x\in H)$ とする．

(3) $I+A$ は全単射であることを示せ．ただし $I:H\to H$ は恒等作用素を表す．すなわち $Ix=x$ $(x\in H)$ が成り立つ．

$\boxed{7}$ $f(z)$ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数とする．実関数に対する逆関数定理を用いて，以下の問いに答えることで，正則関数に対する逆関数定理を証明せよ．

(1) $f(z)$ の実部 $u = u(x,y)$ と虚部 $v = v(x,y)$ を用いて $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R})$ と表すとき，以下の等式を示せ．

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|(x,y) = |f'(z)|^2 \quad (z = x+iy,\ x,y \in \mathbb{R})$$

ただし $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ は関数 $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ のヤコビ行列を表し，$\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$ はヤコビ行列式を表す．

(2) ある点 $p \in \mathbb{C}$ で $f'(p) \neq 0$ を満たすとする．このとき，点 p の開近傍 U が存在し，f は U から $f(U)$ への全単射となることを示せ．ただし $f(U) = \{f(z) \mid z \in U\}$ とする．

(3) ある点 $p \in \mathbb{C}$ で $f'(p) \neq 0$ が成り立つとき，前問で得られた p の開近傍 U 上に f を制限した関数 $f|_U : U \to f(U)$ の逆関数 $g : f(U) \to U$ は $f(U)$ 上で正則であり，以下の等式を満たすことを示せ．

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \quad (w \in f(U))$$

$\boxed{8}$ X を無限集合とする．X の部分集合からなる族 F が次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとき，F を X 上のフィルタという．

(i) $X \in F$, $\emptyset \notin F$.

(ii) $A, B \in F$ ならば，$A \cap B \in F$.

(iii) $A \subseteq B \subseteq X$ かつ $A \in F$ ならば，$B \in F$.

さらに，フィルタ F が次を満たすとき，F は X 上の超フィルタという．

(iv) $A \subseteq X$ ならば，$A \in F$ もしくは $A^c \in F$.

ただし，A^c は A の補集合である．任意の $x \in X$ に対し，

$$F_x = \{A \mid x \in A \subseteq X\}$$

とする．以下の命題 (1), (2), (3), (4) を証明せよ．

(1) 任意の $x \in X$ に対し，F_x は X 上の超フィルタである．

以下の命題では F は X 上の超フィルタとする．

(2) $F \subsetneq F'$ となる X 上のフィルタ F' は存在しない．

(3) $x \in \bigcap_{A \in F} A$ ならば，$F = F_x$ となる．

(4) F の要素に有限集合が存在すると仮定する．このとき，$F = F_x$ となる $x \in X$ が存在する．