

1.1 くじを引いた後の所持金の期待値  $E$  を求める.

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1500 + \frac{1}{2} \cdot 500$$

$$= 1000.$$

A. どっちでもよい //

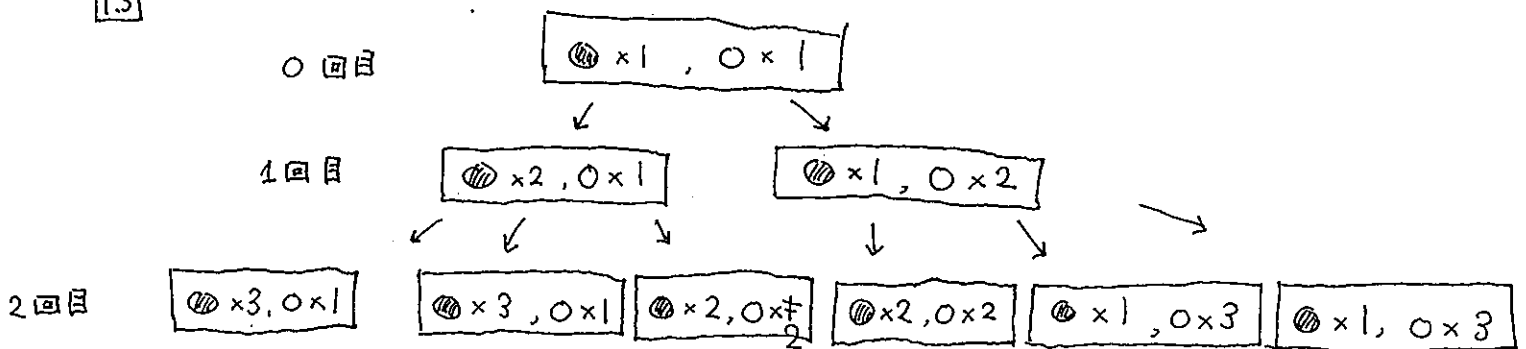
1.2

$$E = \frac{1}{1\text{億}} (1\text{億}500) + \frac{1\text{億}-1}{1\text{億}} (500)$$

$$= 501.$$

A. 買うべきでない // (しかしこれはギャンブルなので、買うか否かは好きにさせる)

1.3



上図より黒球1個である確率  $P_1$  は

$$P_1 = \frac{\text{(1回目の黒球1個のときの白球の個数)}}{\text{(1回目の球の総数)}}$$

$$= \frac{2}{6}$$

$$= \frac{1}{3} //$$

1.6

1回目に A の球' をとり, 2回目に B の球' をとればよい.

1回目に A の球' をとる確率は  $\frac{10}{10}$

2回目に B の球' をとる確率は  $\frac{1}{10}$

よて 求める確率は

$$A. \frac{10}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10} //$$

1.7

A. 0 //

1.8

求める確率は 5回連続 A の球' をとる確率 P に等しい.

$$P = \frac{10}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{6}{10}$$

$$= \frac{\frac{3024}{\cancel{6324}}}{10000}$$

A.  $P < \frac{1}{2} //$

1.9

n回目は 初めて 2種 の r-ホーン が ぞる 確率を  $P_n$  とする.

$$P_n = \left( \frac{1}{10} \right)^{n-1} \cdot 10$$

$$= \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \times 2$$

よて 求める値は 以下のとおり.

$$E = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot P_n$$

$$= \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} - \frac{1}{2} \right) \times 2$$

$$= \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left( 1 - \frac{1}{2} \right)^2} - \frac{1}{2} \right) \times 2$$

$$= \frac{3}{2} \times 2 // = 3 //$$

⊗ 3つ目の等式は

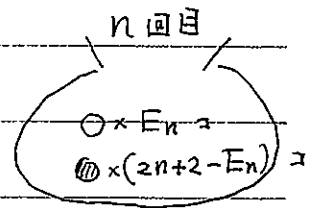
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

の両辺を微分したものを用いた.

2.1

$E_n$  を  $n$  回目の白球の個数の平均値とする。

以下の関係式が成り立つ



$$E_{n+1} = \frac{2n+2-E_n}{2n+2} \cdot E_n + \frac{E_n}{2n+2} (E_n + 1)$$

$\left( \begin{array}{l} \text{~~~~~} \\ \text{n+1 回目} \\ \text{に白球} \\ \text{が } E_n \text{ コマ} \\ \text{である} \\ \text{確率} \end{array} \right)$

$\left( \begin{array}{l} \text{~~~~~} \\ \text{n+1 回目} \\ \text{に白球} \\ \text{が } E_n + 1 \text{ コマ} \\ \text{である} \\ \text{確率} \end{array} \right)$

$$= \left( 1 + \frac{1}{2(n+1)} \right) E_n$$

よって

$$E_n = \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \left( 1 + \frac{1}{2(n-1)} \right) \cdots \left( 1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$E_n = e^{\log E_n}$$

$$= e^{\left\{ \log \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) + \log \left( 1 + \frac{1}{2(n-1)} \right) + \cdots + \log \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \right\}}$$

$$\approx e^{\left\{ \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} + \cdots + \frac{1}{2} \right\}}$$

$$\approx e^{\frac{1}{2} \log n}$$

$$= \sqrt{n}$$

ここで 3 行目の近似は  $\log(1+x) \approx x$

4 行目の近似は  $\log n = \int_1^n \frac{1}{x} dx$

$$\approx 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を用いた。



2.3 A. mathematica を用いる.  $( P = \sum_{k=40}^{60} \frac{1}{2^k} \binom{N}{k} )$

2.4

$k-1$  種の  $\gamma$ -ホンをもっていて,  $j$  回目に  
 $k$  種の  $\gamma$ -ホンがえさる確率を  $P_j$  とする.

$$P_j = \left( \frac{k-1}{n} \right)^{j-1} \left( \frac{n-k+1}{n} \right)$$

よって

$$\begin{aligned} T_k - T_{k-1} &= \sum_{j=1}^{\infty} j P_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j \left( \frac{k-1}{n} \right)^{j-1} \left( \frac{n-k+1}{n} \right) \\ &= \frac{n-k+1}{n} \frac{1}{\left( 1 - \frac{k-1}{n} \right)^2} \\ &= \frac{n}{n-k+1} \quad // \end{aligned}$$

