数学クイズ 2015

担当　深谷友宏

2015 年 7 月 29 日 (水), 30 日 (木)　東北大学理学部数学科オープンキャンパス

概要

円というのは，点，直線と並び，幾何学における最も基本的な図形の一つです．私たちの身の回りには，皿や車輪など，円の形をしたものが多くあります．実際何千年もの昔から，様々な文明で円形の物が造られ，また円周の長さや円の面積が計算されてきました．しかし，円を幾何学の一部として体系的に最初に調べたのは古代ギリシャの数学者達です．彼らの知見は後世の数学の発展に大きな影響を与えました．

皆さんは円周率 π が 3.1415... という数値であることをご存知だと思います．ではこの数値をどのようにして計算したのでしょうか．古来より色々な文明で試みられてきましたが，中でも特筆すべきはアルキメデスによる方法です．この数学クイズでは，遥か彼方の古代ギリシャの時代に思いを馳せながら，アルキメデスによる円周率の近似計算の手法を考えてみましょう．なお，以下は小林昭七先生の著書 [1] を参考にしています．

1　内接および外接する正多角形で近似する．

アルキメデスの方法は，円に内接する正多角形と，外接する正多角形で円周の長さを近似することです．以下では，半径 1 の円を考えます．この円の周の長さは 2π です．この円に内接する正 n 多角形の周の長さを p_n とし，外接する正 n 角形の周の長さを q_n とします．

$\boxed{1}$ 次の不等式が成り立つことを示せ．(注意：$p_n < 2\pi$ は簡単．$2\pi < q_n$ は少し工夫が必要．)

$$p_n < 2\pi < q_n. \tag{1}$$

不等式 (1) より，p_n および q_n の値が求まれば，円周率 π の近似値が得られることになります．p_n, q_n の値を計算するために，n を二倍して $2n$ に変えた時に，これらの値がどのように変化するか考察します．

図 1 において，$\theta = 360°/n$ とし，$\overline{BD} = a, \overline{AB} = a', \overline{AE} = b, \overline{AF} = b'$ とおきます．このとき

$$b' = \frac{2ab}{a+b}, \qquad\qquad a' = \sqrt{ab'} \tag{2}$$

となることを示します．

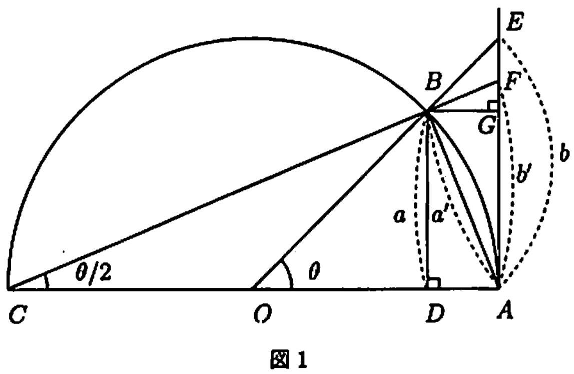

図 1

(2) の最初の等式は，次の等式と同値です (各自で確かめてください)．

$$\frac{b-b'}{b'-a} = \frac{b}{a}. \tag{3}$$

円周角と中心角の関係から，$\angle OCB = OBC = \theta/2$ です．

$\boxed{2}$ $\angle FBG = \angle EBF = \theta/2$ を示せ．

三角形 $\triangle EBG$ を図 2 に拡大して描きます．

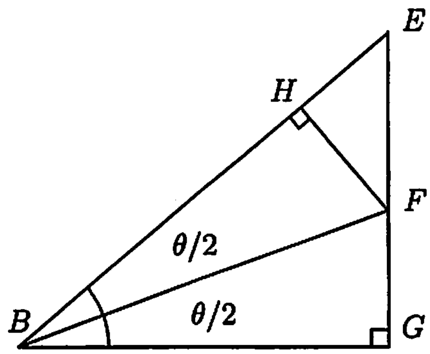

図 2

$\boxed{3}$ 三角形 $\triangle BEF$ の面積を 2 通りに書いてみることにより等式

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BG}} \tag{4}$$

を示せ．

a, a', b, b' の定義より，$\overline{EF} = b - b'$, $\overline{FG} = b' - a$ なので，(4) より

$$\frac{b - b'}{b' - a} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BG}}$$

となります．

$\boxed{4}$ 三角形の相似に着目して，

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DB}} = \frac{b}{a} \tag{5}$$

を示せ．

以上より，等式 (3) （従って (2) の最初の等式）を示すことができました．
次に (2) の二番目の等式を示します．

$\boxed{5}$ 図 1 に表れる，相似な三角形に着目して次の等式を示せ．

$$\frac{a}{a'} = \frac{a'}{b'}$$

以上により $a' = \sqrt{ab'}$ が得られました．

漸化式

式 (2) を使って，p_n と q_n が次の漸化式を満たすことを示しましょう．

$$q_{2n} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}, \qquad p_{2n} = \sqrt{p_n q_n}. \tag{6}$$

図 3, 4 に $n = 6$ の場合の図を描いておきます．内接する正 n 角形の一辺の長さが $\overline{BB'} = 2a$ なので，周の長さは $p_n = 2na$ となる．同様に，外接する正 n 角形の一辺の長さは $\overline{FA} = b$ なので，その周の長さは $q_n = 2nb$ となります．また，内接する正 $2n$ 角形の一辺の長さは $\overline{AB} = a'$ なので，周囲の長さは $p_{2n} = 2na'$ です．

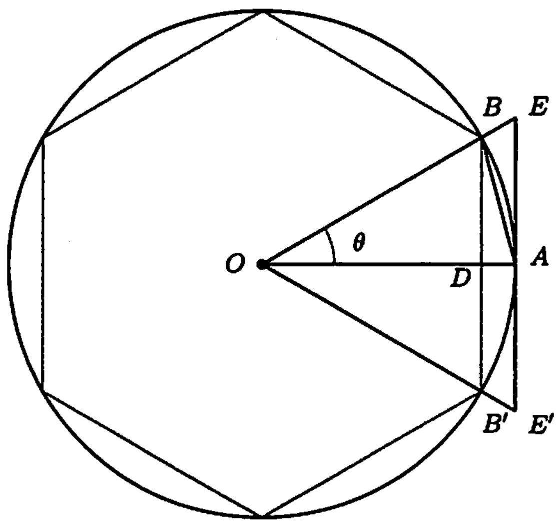

図 3

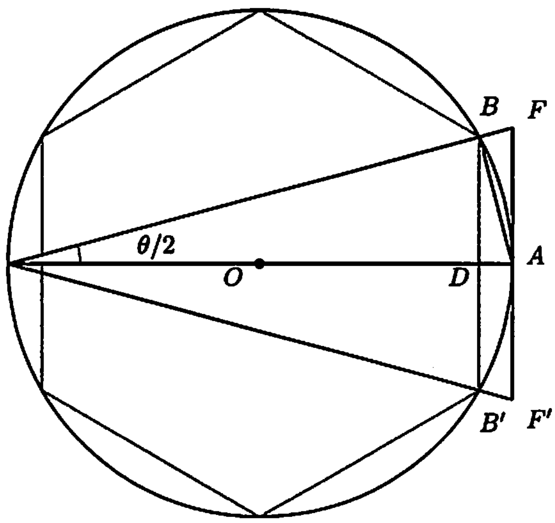

図 4

$\boxed{6}$ 外接する正 $2n$ 角形の一辺の長さは $\overline{FA} = b'$ であることを示せ．(やや難) (ヒント：$n = 3$ の場合に図を描いてみよ)

以上より，$q_{2n} = 2nb'$ だと分かりました．従って (2) を使えば，(6) が成り立つことが直ちに分かります．(6) を繰り返し使えば，

$$(p_n, q_n) \to (p_{2n}, q_{2n}) \to (p_{4n}, q_{4n})$$

というように，次々と計算していくことができます．

$\boxed{7}$ p_6, q_6 の値を直接求めよ．また，それを用いて p_{12}, q_{12} の値を求め，円周率 π の近似値を計算せよ．

2 微積分を使った手法

アルキメデス以後，正多角形を使うというアイディアから抜け出せたのは，彼が生きた時代から千数百年もたった，17 世紀の事でした．ここでは微積分を習った人向けに，円周率を単純な有理数の無限和として表す公式について学んでみましょう．

$\boxed{8}$ $x = \tan\theta$ の逆関数を $\theta = \operatorname{Arctan} x$ と表す．ただし，$-\pi/2 \leq \theta\pi/2$ とする．合成関数の微分法則を用いて，

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arctan} x = \frac{1}{1+x^2} \tag{7}$$

であることを示せ．

等比級数の公式より次を得ます．

$$\frac{1}{1+u^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}u^{2(n+1)}}{1+u^2}. \tag{8}$$

x を $-1 \leq x \leq 1$ を満たす実数とします．式 (8) の両辺を 0 から x まで積分して

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}u^{2(n+1)}}{1+u^2}du. \tag{9}$$

式 (9) の最後の積分を $R_n(x)$ と書くことにします．

$\boxed{9}$ 極限 $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$ を示せ．

以上より $\operatorname{Arctan} x$ の $x = 0$ の周りでのテーラー展開

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{2k+1}x^{2k+1} + \cdots \tag{10}$$

式 (10) において $x = 1$ を代入すれば，

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + (-1)^k\frac{1}{2k+1} + \cdots \tag{11}$$

を得ます．ただし，この公式の収束は非常に遅いです．tan の加法定理をうまく組み合わせることにより，ずっと早く収束する公式を見つけることができますので，興味を持った人は自分で考えてみるか，調べてみてください．

参考文献

[1] 小林昭七. 円の数学. 裳華房, 1999.

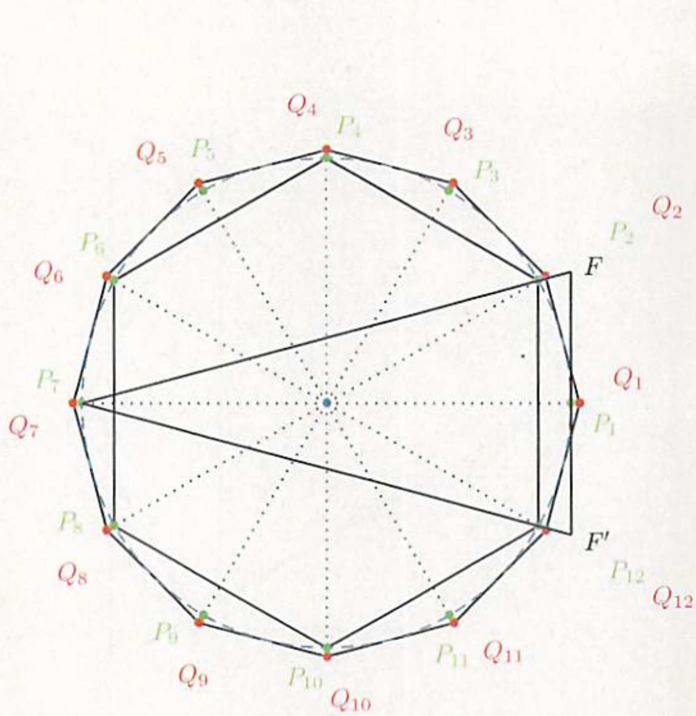
Q_4
P_4
Q_3
P_3
Q_5
P_5
Q_2
P_2
P_6
Q_6
F
Q_1
P_7
Q_7
P_1
P_8
F'
Q_8
P_{12}
Q_{12}
P_9
P_{11}
Q_{11}
Q_9
P_{10}
Q_{10}

図7　$n = 6$

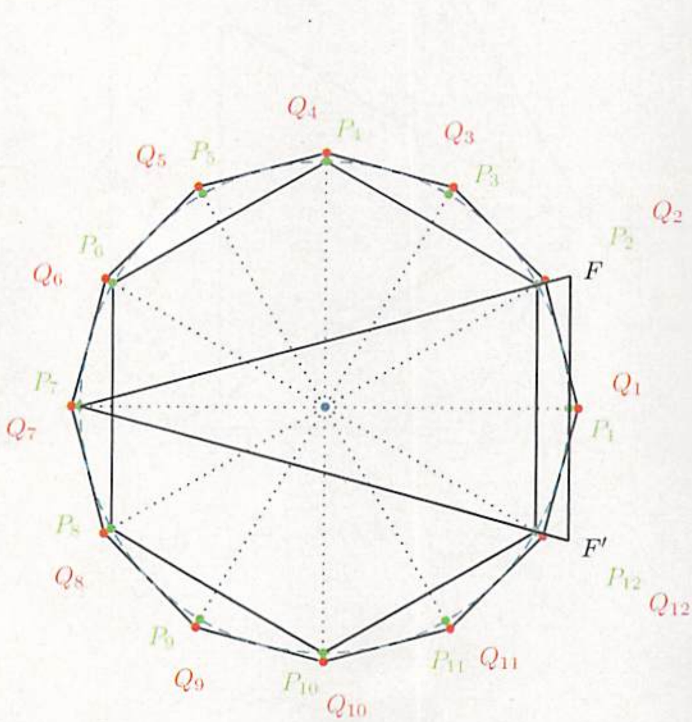
Q_4
P_4
Q_3
P_3
Q_5
P_5
Q_2
P_2
P_6
Q_6
F
Q_1
P_7
Q_7
P_1
P_8
F'
Q_8
P_{12}
Q_{12}
P_9
P_{11}
Q_{11}
Q_9
P_{10}
Q_{10}

図8　$n = 6$

3　おまけ

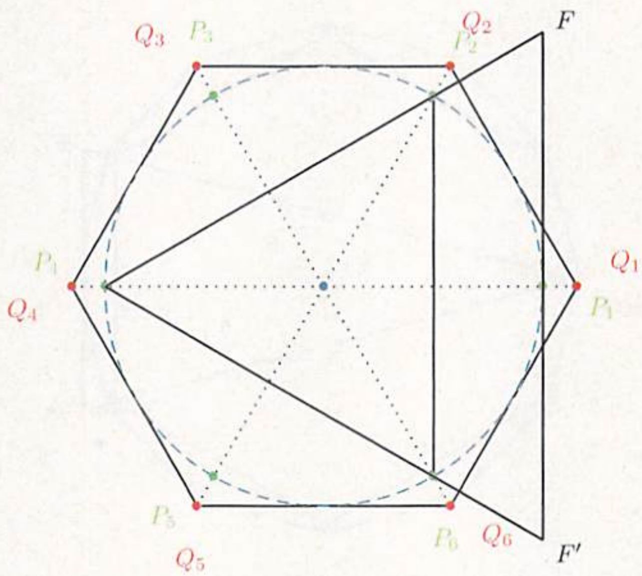

図5　$n = 3$

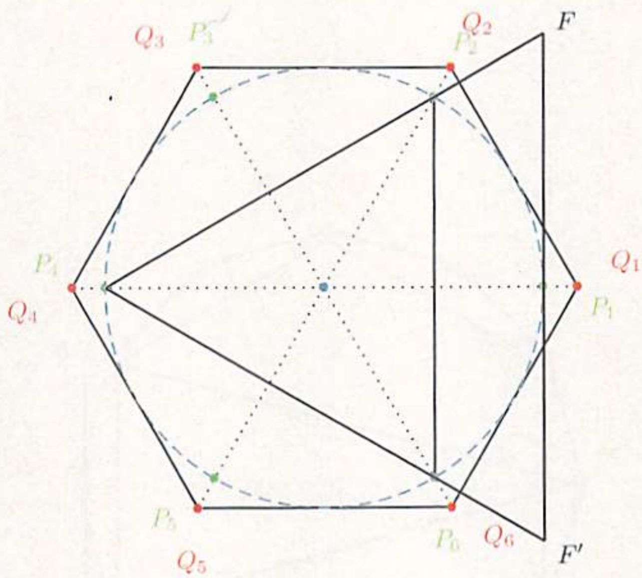

図6　$n = 3$