

# 数学クイズ 2014 解答

文責：見村万佐人

※ 本解答は、オープンキャンパスで配った解答にチャレンジ問題の解答を加え、また、一部内容を加筆したものです。

## 解答 1.

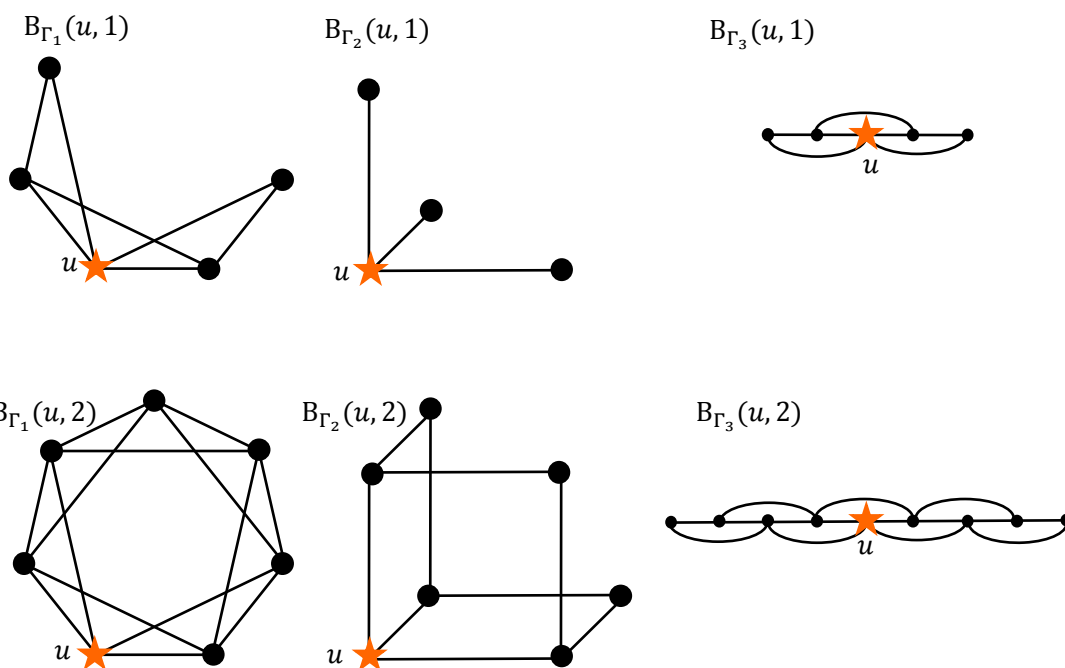
(1)  $\Gamma_1$  の頂点数, 辺数, 次数は 7, 14, 4 で,  $\Gamma_2$  の頂点数, 辺数, 次数は 8, 12, 3 です.  $\Gamma_3$  の次数は 4 です.

(注意) : 「次数」という言葉は, 「次元」と (日本語では) 似ていますが, 別の概念です. 英語だと「次数」が “degree”, 「次元」が “dimension” です.

(2) それぞれ 2, 3, 2 となります.

(3) それぞれ 2, 3 となります.

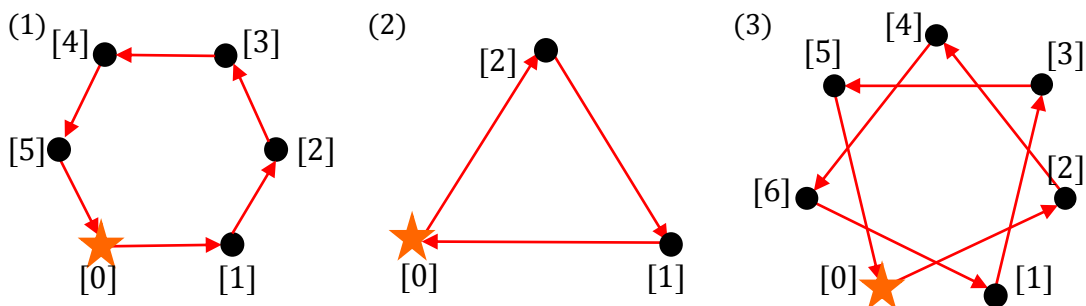
(4) 以下の図のようです.



(注意) : 「ボール」を描くときに, 「ボールの中に入っている頂点を結んでいた元のグラフの辺は全てボールに入れる」 ことには, くれぐれも注意して下さい.

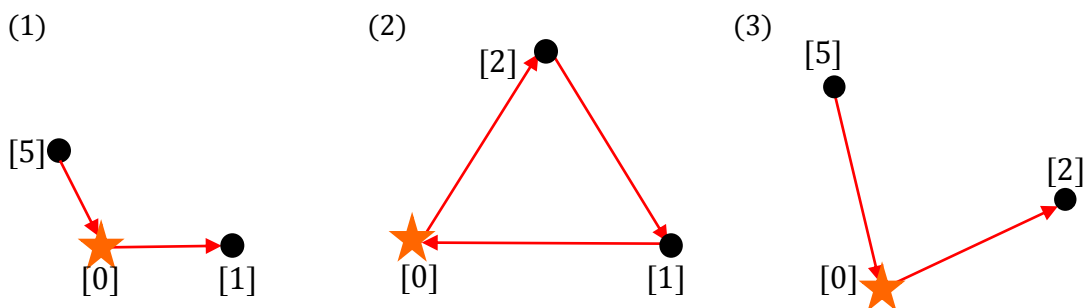
※ 以下の解答では、色つきグラフの辺の色付けを終点に矢印で書くことにします（問題編では、見易さのために辺の真ん中に矢印を書いていました）。

**解答 2.** それぞれ次の図のようになります。

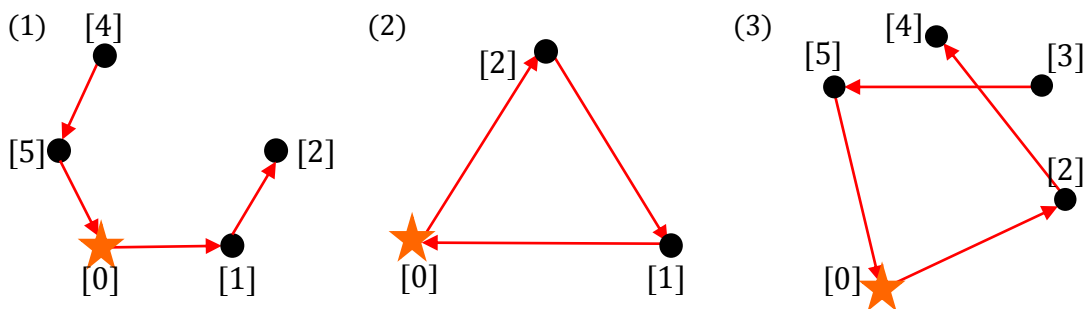


**解答 3.** それぞれ以下の図のようになります。

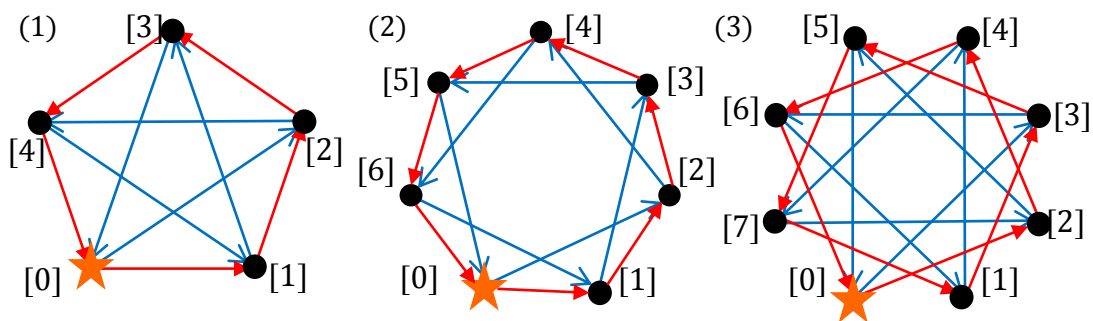
・半径 1 のボール :



・半径 2 のボール :



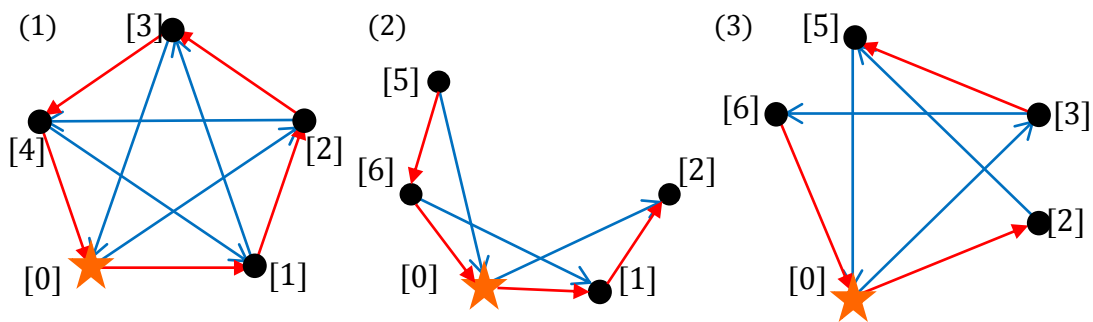
**解答 4.** それぞれ次図のようになります.



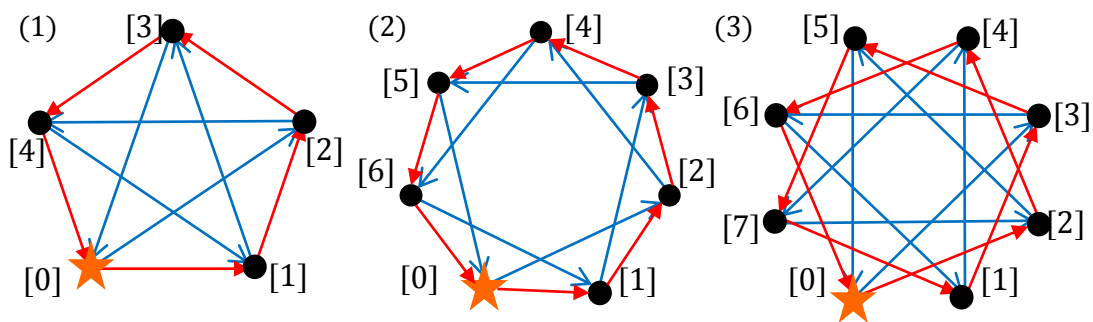
※ このようなグラフは大学以降で「群のケーリーグラフ (Cayley graph)」ないしは「群のケーリー図形 (Cayley diagram)」というものに一般化されます. 興味のある人は調べてみてください. 日本語で書かれたもの (インターネット上の文書ファイル) でもある程度情報を得ることができると思います.

**解答 5.** 問題文では問われてはいませんが, せっかくなので(3)でのボールも図示しておきます. それぞれ下図のようになります.

・半径 1 のボール:



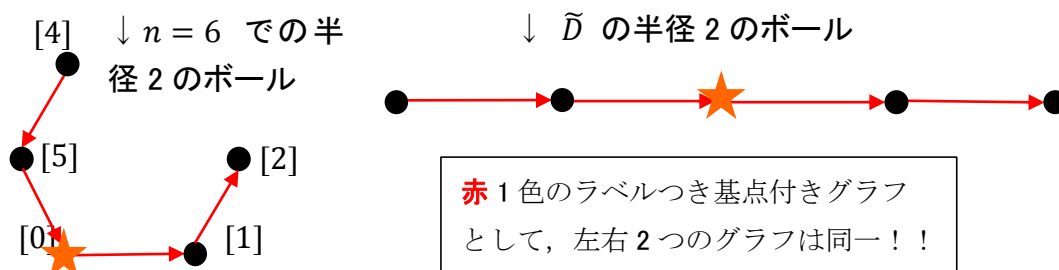
・半径 2 のボール: どれもグラフ全体になります.



**解答 6.**

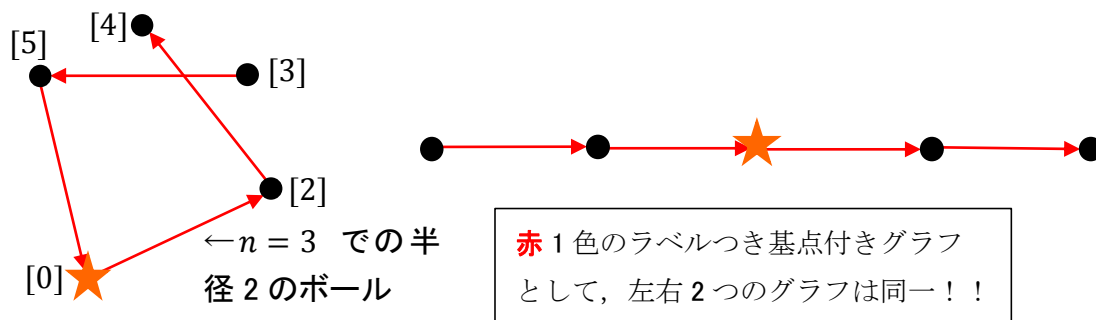
(1) 下図のようなことを一般の  $n$  で考えて,

$$C(\mathbb{Z}_n; 1) \text{ の } \tilde{D} \text{ に対する近似半径} = \begin{cases} \frac{n-2}{2}, & n \text{ が偶数のとき,} \\ \frac{n-3}{2}, & n \text{ が奇数のとき,} \end{cases} \text{ とわかります.}$$



(2)  $n$  ごとの(1)で求めた近似半径の値を入力-出力の関係でプロットしてみると、 $n$  を大きくしていくと近似半径がどんどん際限なく大きくなっていくことがわかります。よって、「色つき基点付きグラフの極限」の定義から、 $\{C(\mathbb{Z}_n; 1)\}_{n \geq 4}$  の極限はこの  $\tilde{D}$  となることが証明されました。

**解答 7.** 小さい  $n$  と小さい半径でのボールを描いてみると以下ようになります。



これを見ると、実のところ問題 6 (で  $n$  が奇数のとき) と同一のボールが出ていることがわかります。より正確には、

$$\lceil C(\mathbb{Z}_{2n+1}; 2) \text{ の } \tilde{D} \text{ に対する近似半径} = n - 1 \rceil$$

とわかります。ここで、 $\tilde{D}$  は問題 6 で出てきたグラフのことです。以上から、 $\{C(\mathbb{Z}_{2n+1}; 2)\}_{n \geq 2}$  の極限は問題 6 の  $\tilde{D}$  と同じ、次ページのグラフです。



(注意) : 図示をするときに頂点集合  $[0], [1], [2], \dots, [2n]$  を「正  $2n + 1$  角形の頂点」のようにして並べましたが,

グラフの距離での遠近感と, このように並べたときのなんとなくの遠近感は別物

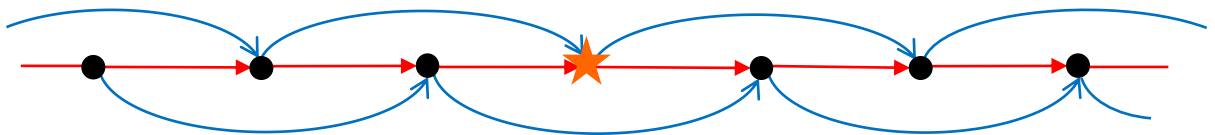
であることに気をつけてください. 今回の最たる例としては, 頂点 [1] は(「正  $2n + 1$  角形の頂点」のように図示するとなんとなく基点 [0] から近く見えますが), 実際のグラフ距離では基点 [0] から非常に遠いことがいえます.

今回のクイズ中に, 本問の答を「上の直線グラフ 2 本」と予想した人が何人かいました. しかし, 上のことを考えると,

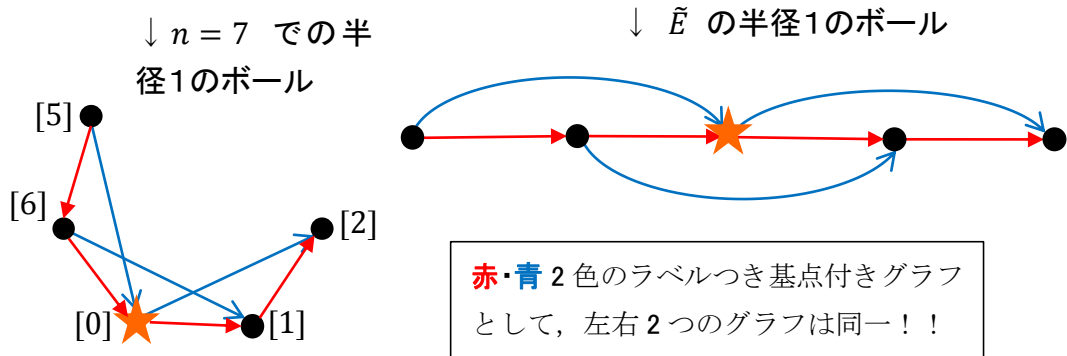
「頂点 [1] のまわりで“極限”として出てきそうな直線グラフは, そもそも基点 [0] から非常に遠いので, 極限をとるときに“見えなく”なる」ので, 正解は上のように「直線グラフ 1 本」となります.

チャレンジ問題 9 を解くときには, このような「遠近感」について, 思索を深めていると理解がしやすいことでしょう. 詳しくは解答 9 の [説明 2] (8 ページ) を参照してみてください.

**解答 8.** 下図の「(赤・青 2 色でラベル付けされた) 基点付きグラフ」を  $\tilde{E}$  とおきます.



このとき, 次ページの図のようなことを一般の  $n$  で考えましょう.



すると、詳細は省略しますが、 $C(\mathbb{Z}_n; 1, 2)$  の  $\tilde{E}$  に対する近似半径  $R_n$  が、

$$R_n = \left\lfloor \frac{n-3}{4} \right\rfloor$$

であることがわかります ( $\lfloor x \rfloor$  は  $x$  の整数部分を表す).

※ 皆さん図を描いて確認してみましょう.

この値は  $n$  が大きくなってくとどんどん際限なく大きくなっていくので、 $\{C(\mathbb{Z}_n; 1, 2)\}_{n \geq 6}$  の極限は上図のグラフ  $\tilde{E}$  であると証明できました.

(訂正) : 配布した解答では、 $R_n = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$  としていましたが、上の式が正しいです. 本プリントを以って訂正いたします.

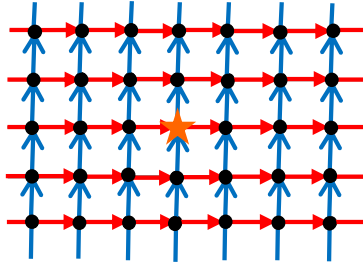
**解答9#.** 本問はチャレンジ問題だけあって大変難しかったのではないかと思います. 実際の数学クイズのときには、結構な人がこの問題で頭を抱えていました. 2日間を通して少なくとも一人、真相にたどり着くのが時間の問題、という状況にまで進んだ人がいました. 大変嬉しく思いました!

数学クイズは7月末に終わりましたが、その後も考え続けて、本解答を見る前に自分なりの答えを出せていれば幸いです.

まず、解答を述べますと、

$\{C(\mathbb{Z}_{n^2+1}; 1, n)\}_{n \geq 3}$  の極限は、次ページのようなグラフ  $\tilde{F}$  です.

$\{C(\mathbb{Z}_{n^2+1}; 1, n)\}_{n \geq 3}$  の極限となるグラフ  $\tilde{F}$



※ 数学クイズの最中に、もしくは、その後も本問に取り組んで、上の真相にたどり着いた人もいます。そのような人は、極限で“2次元的な”グラフが出てきてさぞかしビックリしたのではないのでしょうか？数学は本当に面白いですね！

先に答えを書いてしまったので、どうやって「極限が上のグラフ  $\tilde{F}$  である」ことを証明するかを考えていきましょう。ここでは、厳密な証明ではなく、「説明」を2通り述べます。興味がある人はアイデアを突き詰めて、ちゃんとした「証明」にまでもって行ってください。

**[説明 1]**： 実際に、 $C(\mathbb{Z}_{n^2+1}; 1, n)$  のボールを描いて、 $\tilde{F}$  のボールと比べてみましょう。大変ですがやってみると、結論としては

$$C(\mathbb{Z}_{n^2+1}; 1, n) \text{ の } \tilde{F} \text{ に対する近似半径が } \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \text{ である.}$$

ことが確認できます。この値は  $n$  を大きくしていくと際限なくどんどん大きくなっていくので、

$$\{C(\mathbb{Z}_{n^2+1}; 1, n)\}_{n \geq 3} \text{ の極限は } \tilde{F} \text{ である}$$

ことがわかります。

(説明終)

※ 上の「説明」では、何かもやもやするのではないのでしょうか。それは、「どうして極限が上の  $\tilde{F}$  になるかの原理的な説明がないので、結果論的な議論となっている」からだと思います。以下の [説明 2] で、

$$\boxed{\text{どうして極限で } \tilde{F} \text{ のような“2次元格子”が出てくるのか}}$$

について、それが自然に現れるさまを（アイデアだけ）説明します。

**[説明 2]**： 前ページで書いたように、どうして極限のグラフとして  $\tilde{F}$  が出てくるのか、についてアイデアを説明します。この際、重要なのが、問題 7 の解答の後の（注意）（5 ページ）で書いた、

グラフの距離での遠近感と、頂点に振ってある番号の遠近は別物

ということです。

このことをより具体的に見てみましょう。説明の都合で  $n$  が偶数のときを簡単のために考えましょう。このとき、基点から頂点  $[n]$  までの距離は 1 ですが、頂点  $[\frac{n}{2}]$  までの距離は（ちょっと考えるとわかりますが） $\frac{n}{2}$  です。従って、 $n$  が非常に大きいとき、基点から見て、頂点  $[n]$  はとても近いですが、頂点  $[\frac{n}{2}]$  は非常に遠い（ある種の言い方をすればほぼ“見えない”）こととなります。このような遠近感を頭の中に入れて、今からする議論をじっくり追ってみてください。

グラフ  $C(\mathbb{Z}_{n^2+1}; 1, n)$  を作るのにあたって**赤い矢印**を 1 で、**青い矢印**を  $n$  で作りました。このグラフを作るには、以下の(あ)~(う)の 3 つのルールに従ってグラフを描いていけばよいことがわかります：

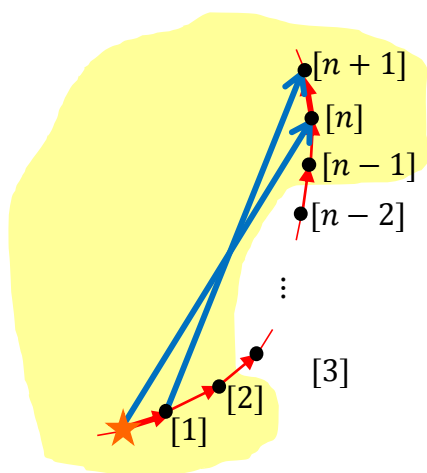
- (あ) 「**赤い矢印**を  $n$  回たどる」ことと、「**青い矢印**を 1 回たどる」ことは同じ結果となる。
- (い) 「**赤い矢印**を 1 回たどった後に**青い矢印**を 1 回たどる」ことと、「**青い矢印**を 1 回たどった後に**赤い矢印**を 1 回たどる」ことは同じ結果となる。
- (う) 「**赤い矢印**を  $n^2 + 1$  回たどる」と一周して元に戻ってくる。

以下これに注意して、例えば ( $n$  がある程度以上大きいとき)  $C(\mathbb{Z}_{n^2+1}; 1, n)$  の基点中心半径 2 のボールを描いていきましょう。重要なことは、

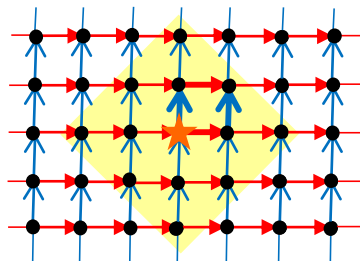
半径 2 のボールを描くときは、基点からの距離が 2 以下の頂点しか見えない

ということです。すると次ページの図の、薄い黄色で描かれている部分しか、半径 2 のボールを描くときには見えないことがわかります（以下の議論で本質的な部分を取り出すため、ボールのうち矢印が基点から出ている方向のほうしかかいてありません。本当のボールは基点に矢印が入ってくる方向の方も入れたものになります）。





(参考) :  $\tilde{F}$  での基点中心半径 2 のボール



上の図を見ながら以下の議論をじっくり読んで理解してください。

- (あ)のルールは、半径 2 のボールを考えるとときには“見えない”。  
(「赤い矢印を  $n$  回たどる」ところの長さが  $n$  となってしまって、ボールの外に出てしまうからです。上図を見ながらどういうことを考えてみて下さい)
- ◎ (い)のルールは、“見える”もので、ボールにも適用される。  
(これも上の図の太い赤・青の矢印のところを見て理解に努めてください)
- (う)のルールは青い矢印も混ぜて書いても長さが最短で  $n+1$  になってしまって、これまた(あ)のルールと同様、半径 2 のボールでは“見えない”。

このように考えると、 $n$  が充分 2 よりも大きいとき、

$C(\mathbb{Z}_{n^2+1}; 1, n)$  の基点中心半径 2 のボールは、 $\tilde{F}$  のそれと同一である

ことがわかります！(上図の太い赤・青の矢印が、左右の図でちゃんと対応していることを考えてみましょう。)

今回は説明の都合で半径 2 のボールで議論しましたが、 $n$  が非常に大きければ、同様に、より大きい半径の基点中心ボールが、 $\tilde{F}$  でのそれと同一であることも証明できます。これは、

$n$  を大きくしていくと、 $C(\mathbb{Z}_{n^2+1}; 1, n)$  の  $\tilde{F}$  に対する近似半径が、

際限なくどんどん大きくなっていく

ことを意味しています。よって求める極限としてグラフ  $\tilde{F}$  が現れます。(説明終)

※上の議論で重要だったのは、色つき基点付きグラフの極限を考えると、

基点の近くの情報しか“見えず”，極限に反映されない

ということです。[説明 2] の議論をじっくり読んで理解すると、どうして極限に“2次元格子”が現れたのか、を説明することができます。

それが説明できた人は、例えば同じようにして、極限が「3次元立方格子の辺を縦・横・斜めで3色に色分けしたグラフ」となるような、「余りから作られる(3色で色づけられた基点付き)グラフ」の列を具体的に作ってみましょう。これもできれば[説明 2]をちゃんと理解できたといってよいでしょう。

皆さんが自力でうんうんうなって導き出した結論と、上での議論を見比べてみて下さい。自分で苦労して考えた分だけ得るものがあるはずですよ。

**解答 10.** 頂点集合の半分までの個数の部分集合  $S$  をとってきて  $j(S)$  を計算する、をしらみつぶしに行なってそれらの最小値を求めましょう。詳細は省略しますが、

$$h(\Gamma_1) = \frac{2}{3} \text{ (} S \text{ として 6 角形の隣接する 3 頂点からなる集合を取ってきたもの),}$$

$$h(\Gamma_{ii}) = 3 \text{ (} S \text{ として 2 頂点からなる集合を取ってきたもの),}$$

$$h(\Gamma_2) = 1 \text{ (} S \text{ として、例えば立方体の上 4 頂点からなる集合を取ってきたもの),}$$

となります。

次に、 $C(\mathbb{Z}_m; 1)$  の等周定数を求めましょう。 $C(\mathbb{Z}_m; 1)$  において頂点集合  $S$ ,  $1 \leq |S| \leq \frac{|V|}{2}$ , をいかにとろうと、 $S$  と  $S^c$  を結ぶ辺の数は 2 本以上となります。 $1 \leq |S| \leq \frac{|V|}{2}$  の

$$\text{とき } \begin{cases} |S| \leq \frac{m}{2}, & m \text{ が偶数のとき,} \\ |S| \leq \frac{m-1}{2}, & m \text{ が奇数のとき,} \end{cases} \text{ ですので,}$$

$$\begin{cases} j(S) \geq \frac{4}{m}, & m \text{ が偶数のとき,} \\ j(S) \geq \frac{4}{m-1}, & m \text{ が奇数のとき,} \end{cases}$$

となります。それぞれの等号は  $S$  が隣接するそれぞれの個数の頂点からなる集合のときに実現されますので、そのときに最小値を与えています。以上より、

$$h(C(\mathbb{Z}_m; 1)) = \begin{cases} \frac{4}{m}, & m \text{ が偶数のとき,} \\ \frac{4}{m-1}, & m \text{ が奇数のとき,} \end{cases}$$

とわかります。

**解答 11#.** 本問(2)では問題 9 の結果を使います. 数学クイズのときには時間が限られていたこともあり, 本問にたどり着いた人はいませんでした. その後も考え続けてくれた人もいるかもしれません.

(1) こちらはそんなに難しくありません. 例えば,  $U_n$  として,

$$\left\lfloor \frac{n^2+1}{2} \right\rfloor \text{ 点集合 } \left\{ [0], [1], \dots, \left\lfloor \frac{n^2-1}{2} \right\rfloor \right\}$$

をとってきましょう. すると, 1 で作られる辺が  $U_n$  とその補集合を結ぶのは 2 本しかありません. 同様に,  $n$  で作られる辺が  $U_n$  とその補集合を結ぶのは  $2n$  本です (確認してみてください). 従って,

$$j(U_n) = \frac{2(n+1)}{\left\lfloor \frac{n^2+1}{2} \right\rfloor} \leq \frac{2(n+1)}{\frac{n^2-1}{2}} = \frac{4}{n-1}$$

となりますから,  $n$  を大きくするとこの値はいくらでも小さく (0 に近く) になります.

よって, 問題文のグラフの列  $\{\Gamma_n\}_{n \geq 3}$  はエクспанダーグラフ列にはなりません. (証明終)

(2) この解答はあえて図を描かず, いろいろなところを省略した議論にしておきます. 興味のある人は図などを自分で補完して, 議論のどこで問題 9 の極限の結果を本質的に使っているかを考えながら, 議論を追って行ってください.

**[説明]** : 問題 9 の解決から,  $C(\mathbb{Z}_{n^2+1}; 1, n)$  のグラフ  $\tilde{F}$  に対する近似半径は  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  で

した. したがって, この半径の範囲では (基点中心の) ボールの振る舞いは極限の“2次元格子”のグラフ  $\tilde{F}$  でのボールの振る舞いと等しくなっています. 正の整数  $k$  をとってきて固定します.

今,  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \geq 2k+1$  であるとします. すると, 極限のグラフで, 基点中心の幅  $2k$  の正方形は, それと辺で結ばれている正方形の外側にある頂点集合 (これを「1-近傍」といいます) までひっくるめて近似半径のボールに入っています. この正方形内の頂点たちの集合を  $S_k$  おきます. すると  $\tilde{F}$  上では,

$$j(S_k) = \frac{4(2k+1)}{(2k+1)^2} < \frac{2}{k}$$

となります. この値を計算するのに使った正方形もその「1-近傍」も  $\tilde{F}$  の半径  $2k+1$  のボールにすっぽり入っています. 今  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \geq 2k+1$  と仮定して

いるので、このボールは  $\Gamma_n$  の ([0] 中心) 半径  $2k+1$  のボールと等しいので、 $\Gamma_n$  のボールの方で  $S_k$  に対応する集合を  $T_k$  と書きましょう. すると,

$$|T_k| = (k+1)^2 \text{ で, } j(T_k) < \frac{2}{k} \cdots (\star)$$

となっています.

最後にこれを使って求めるべき集合  $W_n$  を定義しましょう. 具体例でやったほうがわかりやすいと思うので、問題文で要求されている、 $j(W_n) < 0.000001$  となるようなものを構成してみましょう. 上の ( $\star$ ) で右辺が  $0.000001$  以下になるようにするには  $k \geq 2000000$  とすればよいです. このとき、要素の数を  $n$  個以下にしたいのですから、

$$n = (k+1)^2 = 2000001^2$$

として (このとき、確かに  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \geq 2k+1$  を満たします), このときの  $W_n$  と

して  $T_{2000000}$  をとれば、上の不等式から確かに、

「 $n$  個以下の頂点たちからなる集合で、 $j(W_n) < 0.000001$  となるもの」

を構成できたこととなります.

一般の場合も、同様の構成ができます.

(説明終)

※ 問題 11.(2)で問題 9 の解答を用いるといかに見通しよく議論ができるか、が上の [説明] での議論から伝わってきましたでしょうか. このように、

## 色つき基点付きグラフの極限(収束)

の話は、一見それと関係のない問題にアタックするときにも強力な道具となります. このグラフの収束は、3 ページに書いた「群のケーリーグラフ」を通じて、「the space of marked groups」という空間での、「群の収束」というものにつながります. この概念は、グリゴルチュック (R. I. Grigorchuk) という数学者によって 1960 年代に提唱されたもので、現在でも活発に研究をされています.

実際、今回の数学クイズ担当者 (見村) は「幾何学的群論 (Geometric Group Theory)」と呼ばれる数学の新しい分野を研究しています. その中でも、最近このグラフの収束を用いて、「群の大スケール幾何学 (coarse geometry)」というトピックで“既存の見方を格段に広げる”ような研究成果を出しました. このように、こんな単純そうに見える、「色つき基点付きグラフの収束」というアイデアは、先端の現代数学でもホットな話です. 皆さんの中でこういうことに興味をもった人が大学進学後いっそう数学を勉強し、視界を広めて行くことを楽しみにしています!!

[謝辞] : 最後に, 本数学クイズのプリントを作成するに当たって大変よい意見を頂きました, 東北大学 WPI (世界トップレベル研究拠点形成プログラム) 助教の田中亮吉さん; 東北大学大学院理学研究科数学専攻後期博士課程 3 年の小澤龍ノ介さんのお二人に感謝申し上げます.